ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ LAN ANH

BẤT ĐẲNG THỨC TỪ GÓC NHÌN HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ LAN ANH

BẤT ĐẲNG THỨC
TỪ GÓC NHÌN HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Bất đẳng thức đóng một vị trí quan trọng trong toán học. Bản thân bất đẳng thức (và đẳng thức) có ý nghĩa độc lập: Bất đẳng thức (đẳng thức) thể hiện mối quan hệ (lớn hơn, nhỏ hơn, bằng nhau) giữa các đại lượng. Nhiều bài toán tối ưu (tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất), giải phương trình và hệ phương trình,... cần đến hoặc thực chất là đánh giá bất đẳng thức.

Bất đẳng thức cũng đóng vai trò quan trọng trong giảng dạy và phổ biến toán học trong các trường phổ thông và đại học. Phần lớn các bất đẳng thức được chứng minh và sử dụng thông qua các phép biến đổi đại số. Theo tìm hiểu của tôi, hiện chưa có một tài liệu hoặc một luận văn cao học nào dành riêng trình bày các phương pháp hình học chứng minh bất đẳng thức. Trong khi đó, nhiều bất đẳng thức có thể minh họa hoặc chứng minh bằng hình học. Chứng minh hình học các bất đẳng thức thường đơn giản và trực quan hơn, vì vậy cho phép nhìn bất đẳng thức dưới góc nhìn sinh động hơn. Theo một nghĩa nào đó, có thể coi chứng minh hình học là một phương pháp chứng minh bất đẳng thức khá độc đáo.

Trong khuôn khổ luận văn này tôi xin được trình bày đề tài: "Bất đẳng thức từ góc nhìn hình học". Luận văn được tổng hợp từ cuốn sách của Claudi Alsina, Roger B. Nelsen [2] và tham khảo thêm một số tài liệu khác (thí dụ, [4], [5]).

Mục đích của luận văn này là trình bày phương pháp sử dụng hình học để chứng minh các bất đẳng thức.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. *Sử dụng độ dài trong chứng minh bất đẳng thức.* Chương 1 trình bày sử dụng độ dài trong chứng minh các bất đẳng thức, như bất đẳng thức tam giác, bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình bình phương.

Chương 2. *Sử dụng diện tích và thể tích chứng minh bất đẳng thức.* Nhiều bất đẳng thức có thể được chứng minh nhờ công cụ diện tích và thể tích. Chương này trình bày phương pháp diện tích và thể tích chứng minh bất đẳng thức.

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Nhân dịp này tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên tôi, cổ vũ, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Học viên

Phạm Thị Lan Anh

Chương 1

Sử dụng độ dài trong chứng minh bất đẳng thức

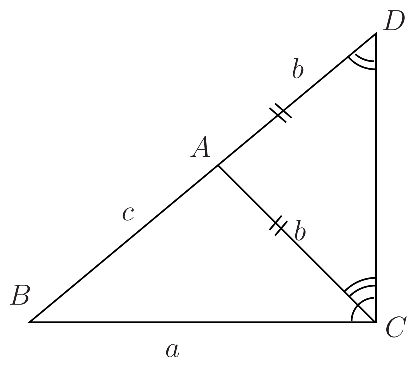
Chương này gồm bảy mục, trình bày một số bất đẳng thức cơ bản được sử dụng liên quan tới nội dung nghiên cứu của đề tài và ứng dụng các bất đẳng thức này để chứng minh, vận dụng vào các hệ quả, ví dụ cụ thể. Nội dung của chương dựa chủ yếu theo tài liệu [2] và tham khảo thêm một số tài liệu khác (thí dụ, [4], [5]).

1.1 Các bất đẳng thức liên quan tới tam giác

Định lý 1.1.1. (Bất đẳng thức tam giác). *Ba số dương a, b, c tạo thành độ dài ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi $a + b > c, b + c > a$ và $a + c > b$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ hai, hai bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự. Gọi a, b, c là các chiều dài cạnh của tam giác ABC như trong Hình 1.1. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trong tam giác BCD, ta sẽ so sánh BD với BC.
Do tia CA nằm giữa hai tia CB và CD nên

$$\widehat{BCD} > \widehat{ACD}. \tag{1.1}$$



Hình 1.1: Minh họa chứng minh phần thuận định lý về bất đẳng thức tam giác

Mặt khác, theo cách dựng, tam giác ACD cân tại A nên

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} (= \widehat{BDC}). \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra:

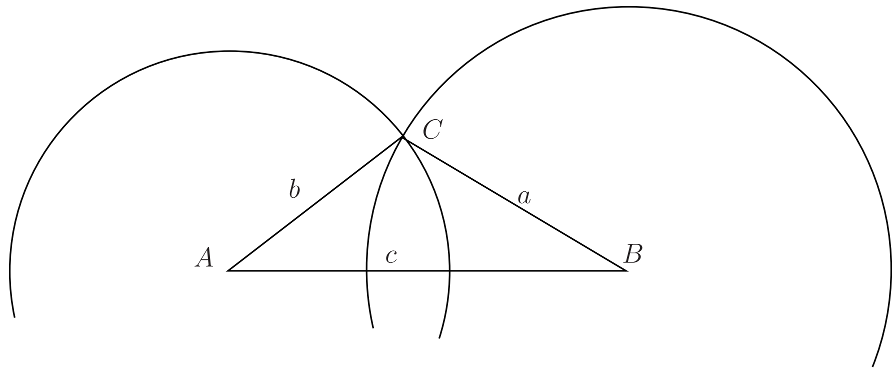
$$\widehat{BCD} > \widehat{BDC}.$$

Trong tam giác BCD, ta có $\widehat{BCD} > \widehat{BDC}$ nên theo định lý về quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác, ta suy ra

$$AB + AC = BD > BC,$$

hay $c + b > a$. Tương tự ta cũng chứng minh được $a + b > c$ và $a + c > b$.

Ngược lại, nếu $a + b > c, b + c > a, a + c > b$ ta chứng minh tồn tại tam giác ABC sao cho $AB = c, BC = a, AC = b$. Thật vậy, dựng đường tròn tâm A bán kính bằng b và đường tròn tâm B bán kính bằng a. Nếu tồn tại tam giác ABC thì hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm (điểm C).



Hình 1.2: Minh họa chứng minh phần đảo định lý về bất đẳng thức tam giác

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử hai đường tròn này không cắt nhau, khi đó hai đường tròn tiếp xúc hoặc rời nhau.

+ Trường hợp 1: Hai đường tròn tiếp xúc.

- Hai đường tròn tiếp xúc trong thì $b = a + c$ (nếu đường tròn tâm A chứa đường tròn tâm B) hoặc $a = b + c$ (nếu đường tròn tâm B chứa đường tròn tâm A).

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài thì $c = a + b$.

+ Trường hợp 2: Hai đường tròn rời nhau.

- Hai đường tròn chứa nhau thì $b > c + a$ (nếu đường tròn tâm A chứa đường tròn tâm B) hoặc $a > c + b$ (nếu đường tròn tâm B chứa đường tròn tâm A).

- Hai đường tròn nằm ngoài nhau thì $c > a + b$.

Như vậy, tất cả các trường hợp xảy ra đều mâu thuẫn với giả thiết. Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Từ bất đẳng thức tam giác, có thể suy ra nhiều bất đẳng thức thú vị.

Ví dụ 1.1.2. ([2], p.3) Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có thể nhìn bất đẳng thức đại số $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ dưới các cạnh của một tam giác vuông (Hình 1.3, coi $a = 0$ là trường hợp tam giác suy biến thành đoạn thẳng).